§ 2. Površi u prostoru

Neka je površ data vektorskom jednačinom

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$$

ili u parametarskom obliku

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v)$$

gde je Jacobijeva matrica

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

ranga 2. Tada je vektor normale $\vec{n}$ *na površ dat sa*

$$\vec{n} = [\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'], \quad \vec{r}_u' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{r}_v' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

Ako je površ zadata jednačinom

$$F(x,y,z) = 0,$$

tada je

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right).$$

Ako je površ zadata jednačinom

tada je

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right).$$

Jednačina tangentne ravni površi u tački M_o *odredjenoj vektorom položaja* $\vec{r}_o$ *je*

$$(\vec{r} - \vec{r}_o)\vec{n}_{M_o} = 0.$$

Ako familija površi $f(x,y,z,a) = 0$ *ima obvojnu površ, to ona sva leži na površi* $F(x,y,z) = 0$ *koja se dobija eliminacijom parametra* a *iz jednačina*

$$f(x,y,z,a) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

Ako dvoparametarska površ $f(x,y,z,a,b) = 0$ *ima obvojnu površ to sve njene tačke zadovoljavaju jednačinu* $F(x,y,z) = 0$ *koja se dobija eliminacijom parametara* a *i* b *iz jednačina*

$$f(x,y,z,a,b) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0,$$

no tu jednačinu mogu zadovoljiti i druge tačke.

Dio tablica integrala.

1. $\int u^a \mathrm{d}u = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1.$
2. $\int u^{-1}\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \frac{u'}{u}\mathrm{d}x = \ln|u| + C.$
3. $\int a^u \mathrm{d}u = \frac{a^u}{\ln|a|} + C; \int e^u \mathrm{d}u = e^u + C.$
4. $\int \sin \mathrm{d}u = -\cos u + C.$
5. $\int \cos \mathrm{d}u = \sin u + C.$
6. $\int \frac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u = \operatorname{tg} u + C.$
7. $\int \frac{1}{\sin^2 u}\mathrm{d}u = -\operatorname{ctg} u + C.$
8. $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a} + C.$
9. $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$
10. $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C.$
11. $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+a}} = \ln|u + \sqrt{u^2+a}| + C.$

Newton-Leibnizova formula.

$$\int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int f(u)\mathrm{d}u\Big|_a^b = F(u)|_a^b = F(b) - F(a), \text{ gdje je } F'(u) = f(u).$$

Osobine određenih integrala.

1. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$
2. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$
3. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$
4. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x - \int_a^b f_3(x)\mathrm{d}x.$
5. $\int_a^b c\, f(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

Smjena promjenjivih u određenom integralu.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} x = \varphi(t) & x = a \Rightarrow a = \varphi(\alpha) \Rightarrow t = \alpha \\ dx = \varphi'(t)\mathrm{d}t & x = b \Rightarrow b = \varphi(\beta) \Rightarrow t = \beta \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta h(t)\mathrm{d}t$$

Nepravi integrali. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\ \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,...

Računanje površine ravne figure. U zavisnosti od izgleda slike: $P = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $P = \int_c^d g(y)\mathrm{d}y$, $P = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $P = \int_a^b [\eta(x) - \mu(x)]\mathrm{d}x$, $P = \int_c^d [g(y) - h(y)]\mathrm{d}y$, ...

Zapremina rotacionog tijela. Ako, kriva data u parametarskom obliku $C : \left\{ \begin{array}{c} x = \eta(t) \\ y = \mu(t) \\ t_1 \leq t \leq t_2 \end{array} \right.$ rotira oko x-ose, zapremine se računa po formuli

$$V_x = \pi\int_{t_1}^{t_2} [\mu(t)]^2|\eta'(t)|\mathrm{d}t.$$

Ista kriva ako rotira oko y-ose, $V_y = \pi\int_{t_1}^{t_2} [\eta(t)]^2|\mu'(t)|\mathrm{d}t$. Iz ove dvije formule, za funkcije $y = f(x)$ i $x = g(y)$, slijedi $V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2\mathrm{d}x$ i $V_y = \pi\int_c^d [g(y)]^2\mathrm{d}y$.

Tangentna ravan i normala na površ

Tangentna ravan na površ S u tački M je ravan koja prolazi kroz tačku M i ima osobinu da je rastojanje promjenjive tačke M' na površi od ove ravni kad M' teži ka M beskonačno mala veličina u poređenju sa rastojanjem MM'.

Normala površi u datoj tački površi je prava koja prolazi kroz ovu tačku i normalna je na tangentnu ravan u ovoj tački površi.

Ako je površ zadata jednačinom $F(x,y,z)=0$, tada je vektor normale $\vec{n}$ na površ dat sa

$$\vec{n}=\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right).$$

Ako je površ zadata jednačinom $z=f(x,y)$ tada je

$$\vec{n}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right).$$

Ako je površ zadata vektorskom jednačinom

$$\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k}$$

ili u parametarskom obliku $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$

tada je $\vec{n}=\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'$ gdje je $\vec{r}_u'=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}$ i $\vec{r}_v'=\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$.

(#) Odrediti jednačinu tangentne ravni površi

$S: x = 2u - v, \; y = u^2 + v^2, \; z = u^3 - v^3$ u tački $M_0(3, 5, 7)$ te površi.

Rj.

Jednačina ravni ima oblik $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ gdje je $\vec{n} = (A, B, C)$ vektor normale, a (x_0, y_0, z_0) je tačka na ravni.

Prisjetimo se $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$

Ako je površ data u parametarskom obliku

$x = x(u, v)$

$y = y(u, v)$

$z = z(u, v)$

tada je vektor normale $\vec{n}$ na površ dat sa

$$\vec{n} = \vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v, \quad \vec{r}\,'_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{r}\,'_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}.$$

$\vec{r}\,'_u = (2, 2u, 3u^2)$

$\vec{r}\,'_v = (-1, 2v, -3v^2)$

Odredimo parametre u i v za tačku $M_0(3, 5, 7)$.

$$\left.\begin{array}{l} 2u - v = 3 \quad \Rightarrow \quad v = 2u - 3 \\ u^2 + v^2 = 5 \\ u^3 - v^3 = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u^2 + (2u-3)^2 = 5 \\ u^3 - (2u-3)^3 = 7 \end{array}$$

$u^2 + 4u^2 - 12u + 9 = 5$

$5u^2 - 12u + 4 = 0$ $\qquad u_{1,2} = \dfrac{12 \pm 8}{10}$

$D = 144 - 80 = 64$ $\qquad u_1 = 2 \quad u_2 = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

$u=2$: $v=1$

$u^2+v^2=5$ tačno

$u^3-v^3=7$ tačno

$u=\frac{2}{5}$: $v=\frac{4}{5}-3=-\frac{11}{5}$

$u^2+v^2=\frac{4}{25}+\frac{121}{25}=5$ tačno

$u^3-v^3=\frac{8}{5^3}+\frac{1331}{5^3}\neq 7$

ovo rješenje odpada

Prema tome $u=2$, $v=1$. Za ove vrijednosti imamo

$\vec{r}\,'_u=(2,4,12)$

$\vec{r}\,'_v=(-1,2,-3)$

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 4 & 12\\ -1 & 2 & -3\end{vmatrix}=(-12-24,-(-6+12),4+4)$$

$$=(-36,-6,8)$$

$$\vec{n}=(-2)(18,3,-4)$$

Jednačina tangentne ravni je

$$18(x-3)+3(y-5)-4(z-7)=0$$

$$18x+3y-4z-41=0$$

(#) Dokazati da je tangentna ravan u proizvoljnoj tački površi $(x-2z)^m+(y-3z)^n=4$, $m,n\in\mathbb{N}$, paralelna pravoj $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$.

Rj. Ako je površ zadana jednačinom $F(x,y,z)=0$ tada je $\vec{n}=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)$ vektor normale na površ.

(od ranije znamo da je $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ jednačina ravni kroz tačku $M_1(x_1,y_1,z_1)$ i vektorom normale $\vec{n}=(A,B,C)$).

U našem slučaju

$$F(x,y,z)=(x-2z)^m+(y-3z)^n-4$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=m(x-2z)^{m-1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=n(y-3z)^{n-1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=m(x-2z)^{m-1}\cdot(-2)+n(y-3z)^{n-1}\cdot(-3)=-2m(x-2z)^{m-1}-3n(y-3z)^{n-1}$$

Vektor pravca prave $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$ je $\vec{p}=(2,3,1)$.

Tangentna ravan u proizvoljnoj tački date površi će biti sa pravom akko $\vec{p}\cdot\vec{n}=0$.

$$\vec{p}\cdot\vec{n}=2m(x-2z)^{m-1}+3n(x-2z)^{m-1}-2m(x-2z)^{m-1}-3n(y-3z)^{n-1}$$
$$=0$$

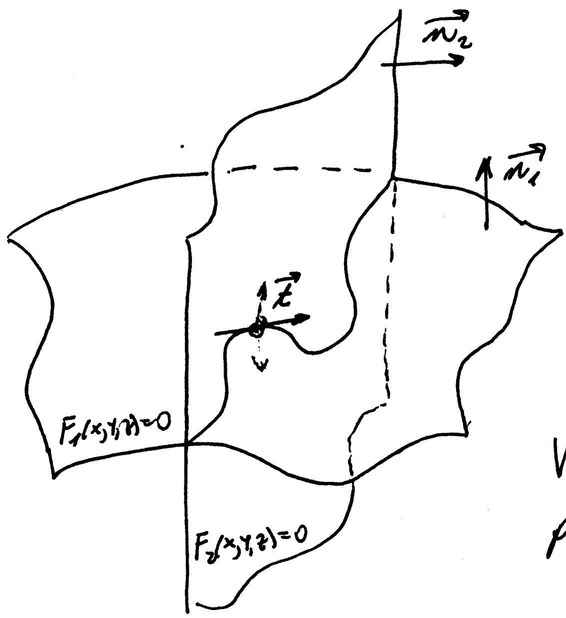
Tatgentne ravni date površi su paralelne sa datom pravom.

(#) Naći tangentu na krivu

$$\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2-47 = F_1(x,y,z) = 0 \\ x^2+2y^2-z = F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

u tački $M(-2,1,6)$.

Rj. U ovom zadatku kriva je data kao presjek dvije površi. Želimo iskoristiti vektore normale $\vec{n}$ na date površi da bi našli vektor tangente



$$F_1(x,y,z) = 2x^2+3y^2+z^2-47=0$$

$$\vec{n}_1 = (4x, 6y, 2z) = 2(2x, 3y, z)$$

$$F_2(x,y,z) = x^2+2y^2-z=0$$

$$\vec{n}_2 = (2x, 4y, -1)$$

Vektor tangente na krivu u proizvoljnoj tački

$$\left.\begin{array}{l} \vec{t} \perp \vec{n}_1 \\ \vec{t} \perp \vec{n}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{t} \parallel \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \\ \vec{t} = k(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) \end{array}$$

gdje je k neki realan broj

$$\vec{t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 3y & z \\ 2x & 4y & -1 \end{vmatrix} = (-3\overset{1}{y} - 4\overset{1\cdot(6)}{yz},\ 2\overset{-2}{x} + 2\overset{-2\,(6)}{xz},\ 2\overset{(-2)(1)}{xy})$$

U tački $M(-2,1,6)$ je $\vec{t} = (-3-24, -4-24, -4) = (-27, -28, -4)$

Jednačina tangente u tački $M(-2,1,6)$ na datu krivu je

$$\frac{x+2}{27} = \frac{y-1}{28} = \frac{z-6}{4}$$

7) Dokazati ortogonalnost sljedećih površi

a) $xy = az^2$,

b) $x^2+y^2+z^2 = b$,

c) $z^2+2x^2 = c(z^2+2y^2)$.

Rj. Ako je površ zadata jednačinom $F(x,y,z)=0$ tada je vektor normale $\vec{n}$ na površ dat sa

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right).$$

Ako sa $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ i $\vec{n_3}$ obilježimo vektore normala na površ a), b) i c) u njihovoj zajedničkoj tački $M(x,y,z)$ tada je

$$\vec{n_1} = \vec{n_1}(y, x, -2az)$$

$$\vec{n_2} = \vec{n_2}(x, y, z)$$

$$\vec{n_3} = \vec{n_3}(2x, -2cy, z-cz)$$

npr. $F_3(x,y,z) = z^2+2x^2-c(z^2+2y^2)$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = 4x \quad \frac{\partial F_3}{\partial y} = -4cy$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial z} = 2z-2cz$$

Pokazaćemo da su vektori $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ i $\vec{n_3}$ uzajamno normalni što znači da su i površi ortogonalne.

$$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = (y,x,-2az)\cdot(x,y,z) = xy+xy-2az^2 = 2xy-2az^2 = 2(xy-az^2)$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{ovo je površ (a) koju je} \\ \text{pomnožimo sa 2} \\ M(x,y,z) \text{ je tačka na površi} \end{array} \right| = 0$$

$$\vec{n_1}\cdot\vec{n_3} = (y,x,-2az)\cdot(2x,-2cy,z-cz) = 2xy\underline{-2cxy}-2az^2\underline{+2acz^2} =$$

$$= 2(xy-az^2-c(xy-az^2)) = 2(1-c)\underbrace{(xy-az^2)}_{\text{ovo je površ a)}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} M(x,y,z) \text{ pripada} \\ \text{površi a)} \end{array} \right| = 0$$

$$\vec{n_2}\cdot\vec{n_3} = (x,y,z)\cdot(2x,-2cy,z-cz) = \underbrace{2x^2-2cy^2+z^2-cz^2}_{\text{ovo je površ c)}} = 0$$ zato što tačka $M(x,y,z)$ pripada datoj površi

S time je tvrđenje zadatka dokazano.

(#) Pokazati da su površi: $\quad x^2+y^2+z^2=x$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x^2+y^2+z^2=y$

ortogonalne.

Rj.

$$x^2+y^2+z^2=x$$

$$x^2-x+y^2+z^2=0$$

$$x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2=\frac{1}{4}$$

$$x^2+y^2+z^2=y$$

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{1}{4}$$

Ovo su dvije sfere poluprečnika $\frac{1}{2}$ sa centrom u tački $A\left(\frac{1}{2},0,0\right)$ odnosno $B\left(0,\frac{1}{2},0\right)$.

Vektor normala na površi u nekoj zajedničkoj tački $M(x,y,z)$ su

$$\vec{n}_1=(2x-1,\ 2y,\ 2z)$$

$$\vec{n}_2=(2x,\ 2y-1,\ 2z)$$

Pokažimo da su vektori $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ normalni.

$$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=4x^2-2x+4y^2-2y+4z^2=2\underbrace{(x^2-x+y^2+z^2)}_{\text{M leži na prvoj sferi}}+2\underbrace{(x^2+y^2-y+z)^2}_{\text{M leži na drugoj sferi}}=0 \quad \ldots(*)$$

Tačka M leži na presječnoj liniji sfera, te njene koordinate zadovoljavaju jednačine $x^2+y^2+z^2=x$ i $x^2+y^2+z^2=y$.

Iz ovog (*) slijedi da su date površi ortogonalne.

(#) Pokazati da sve tangentne ravni na površ

$$z = x f\left(\frac{y}{x}\right)$$

prolaze kroz stalnu tačku.

Rj. Ako je površ data jednačinom $z = f(x,y)$ tada je

$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$ vektor normale $\vec{n}$ na površ.

U našem slučaju

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(\frac{y}{x}\right) + x \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(\frac{y}{x}\right)' = f\left(\frac{y}{x}\right) + x \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot y\,(-1)\,x^{-2} =$$

$$= f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} = f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$\vec{n} = (A, B, C)$
$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$

Jednačina tangentne ravni kroz neku tačku $M(x_1, y_1, z_1)$ date površi je

$$\left[f\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \frac{y_1}{x_1} f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right)\right](x - x_1) + f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right)(y - y_1) + (-1)(z - z_1) = 0$$

Sad želimo iskoristiti činjenicu da je $z_1 = x_1 f\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$

$$\left[f\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \frac{y_1}{x_1} f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right)\right]x + f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right)y - z +$$

$$+ \underbrace{(-x_1) f\left(\frac{y_1}{x_1}\right)}_{= -z_1} + y_1 f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - y_1 f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right) + z_1 = 0$$

$$\left[f\left(\frac{y_1}{x_1}\right) - \frac{y_1}{x_1} f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right)\right]x + f'\left(\frac{y_1}{x_1}\right)y - z = 0$$

tangentna ravan na datu površ

Odavde vidimo da sve tangentne ravni prolaze kroz koordinatni početak.

(#) Odrediti jednačine normale i jednačinu tangentne ravni površi $z=\sqrt{169-x^2-y^2}$ u tački $(3,4,z(3,4))$.

Rj:

$$z(3,4)=\sqrt{169-9-16}=\sqrt{144}=12$$

$M(3,4,12)$

jednačina tangentne ravni i normale na površ $z=f(x,y)$ u tački $M(p_1,p_2,p_3)$: $z-p_3=z'_x(p_1,p_2)(x-p_1)+z'_y(p_1,p_2)(y-p_2)$

$$\frac{x-p_1}{z'_x(p_1,p_2)}=\frac{y-p_2}{z'_y(p_1,p_2)}=\frac{z-p_3}{-1}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{169-x^2-y^2}}(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{169-x^2-y^2}} \Rightarrow z'_x(3,4)=\frac{-3}{\sqrt{169-25}}=\frac{-3}{12}=-\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{169-x^2-y^2}}(-2y)=\frac{-y}{\sqrt{169-x^2-y^2}} \Rightarrow z'_y(3,4)=\frac{-4}{12}=-\frac{1}{3}$$

$$z-12=-\frac{1}{4}(x-3)-\frac{1}{3}(y-4) \quad /\cdot 12$$

$$12z-144=-3(x-3)-4(y-4)$$

$$3x+4y+12z-144-9-16=0$$

$3x+4y+12z-169=0$ jednačina tangentne ravni na površ z

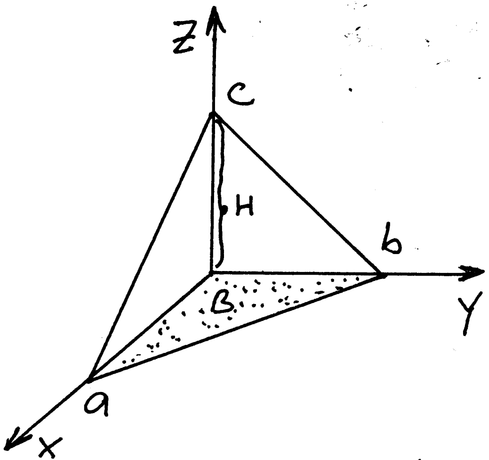
$$\frac{x-3}{-\frac{1}{4}}=\frac{y-4}{-\frac{1}{3}}=\frac{z-12}{-1} \quad /\cdot\left(\frac{1}{-12}\right)$$

$\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{z-12}{12}$ jednačina normale na površ z

(#) Dokazati da tangentne ravni površi $z = \frac{1}{xy}$ tvore s koordinatnim ravnima piramide konstantne zapremine.

Rj.

Jednačina tangentne ravni na površ $z = f(x,y)$ u tački $M(P_1, P_2, P_3)$: $z - P_3 = z'_x(P_1,P_2)(x-P_1) + z'_y(P_1,P_2)(y-P_2)$



$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ kanonični oblik jednačine ravni gdje su a, b i c odsječci koje ravan odsjeca na koordinatnim osama

$$V_{piramide} = \frac{B \cdot H}{3} = \frac{\frac{a \cdot b}{2} \cdot c}{3} = \frac{a \cdot b \cdot c}{6}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{x^2 y} \Rightarrow z'_x(P_1,P_2) = \frac{-1}{P_1^2 P_2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{y^2} = \frac{-1}{x y^2} \Rightarrow z'_y(P_1,P_2) = \frac{-1}{P_1 P_2^2}$$

$$P_3 = f(P_1,P_2) = \frac{1}{P_1 P_2}$$

$$z - \frac{1}{P_1 P_2} = \frac{-1}{P_1^2 P_2}(x - P_1) + \frac{-1}{P_1 P_2^2}(y - P_2) \quad / \cdot P_1^2 P_2^2$$

$$P_1^2 P_2^2 z - P_1 P_2 = -P_2(x - P_1) - P_1(y - P_2)$$

$$P_1^2 P_2^2 z + P_2 x + P_2 y = P_1 P_2 + P_1 P_2 + P_1 P_2 \quad / \cdot \frac{1}{P_1 P_2}$$

$$\frac{x}{P_1} + \frac{y}{P_1} + P_1 P_2 z = 3 \quad / \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{3P_1} + \frac{y}{3P_2} + \frac{z}{\frac{3}{P_1 P_2}} = 1 \Rightarrow V_{piramide} = \frac{\cancel{3}^{1} P_1 \cdot 3P_2 \cdot \frac{3}{P_1 P_2}}{\cancel{6}_{2}} = \frac{9}{2}$$

zapremina piramide za sve tangentne ravni na površ

(#) Naći jednačinu tangentne ravni elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ koja na koordinatnim osama odsjeca jednake pozitivne odsječke.

Rj. Jednačina tangentne ravni na površ $F(x,y,z)=0$ u tački $M(p_1,p_2,p_3)$ ima jednačinu $F'_x(p_1,p_2,p_3)(x-p_1)+F'_y(p_1,p_2,p_3)(y-p_2)+F'_z(p_1,p_2,p_3)(z-p_3)$

Nađimo jednačinu tangentne ravni na elipsoid u proizvoljnoj tački $M(p_1,p_2,p_3)$: (U našem slučaju $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$)

$$F'_x=\frac{1}{a^2}\cdot 2x=\frac{2x}{a^2},\quad F'_y=\frac{2y}{b^2},\quad F'_z=\frac{2z}{c^2}$$

$$F'_x(M)=\frac{2p_1}{a^2},\quad F'_y(M)=\frac{2p_2}{b^2},\quad F'_z(M)=\frac{2p_3}{c^2}$$

$$\frac{2p_1}{a^2}(x-p_1)+\frac{2p_2}{b^2}(y-p_2)+\frac{2p_3}{c^2}(z-p_3)=0 \quad /\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{p_1}{a^2}x+\frac{p_2}{b^2}y+\frac{p_3}{c^2}z=\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}+\frac{p_3^2}{c^2}$$ Napišimo jednačinu ravni u kanonskom obliku

$$\frac{x}{\frac{a^2}{p_1}\left(\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}+\frac{p_3^2}{c^2}\right)}+\frac{y}{\frac{b^2}{p_2}\left(\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}+\frac{p_3^2}{c^2}\right)}+\frac{z}{\frac{c^2}{p_3}\left(\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}+\frac{p_3^2}{c^2}\right)}=1$$

Odavde možemo primjetiti da ako želimo da jednačina tangentne ravni na kordanatnim osama odsjeca jednake odsječke, potrebno i dovoljno je da $\frac{a^2}{p_1}=\frac{b^2}{p_2}$, $\frac{a^2}{p_1}=\frac{c^2}{p_3}$ i $\frac{b^2}{p_2}=\frac{c^2}{p_3}$. ...(*)

Isto tako primjetimo da je $\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}+\frac{p_3^2}{c^2}=1$ ...(**) (ZAŠTO?)

(*) $\Rightarrow$ $p_1=\frac{a^2}{b^2}p_2$, $p_3=\frac{c^2}{b^2}p_2$ ...(1) Sad imamo:

Kada (1) stavimo u (**) dobićemo da je $p_2=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$\frac{x}{\frac{a^2}{\frac{a^2}{b^2}p_2}}+\frac{y}{\frac{b^2}{p_2}}+\frac{z}{\frac{c^2}{\frac{c^2}{b^2}p_2}}=1 \quad /:p_2$$

$$\frac{x}{b^2}+\frac{y}{b^2}+\frac{z}{b^2}=\frac{1}{p_2}$$

Prema tome:

$x+y+z=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ je jednačina tražene tangente

(#) Dokazati da tangentne ravni površi $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$ odsjecaju od koordinatnih osa odsječke čiji je zbir jednak a.

Rj: Jednačina tangentne ravni na površ $F(x,y,z)=0$ u tački $M(p_1,p_2,p_3)$ ima jednačinu

$$F'_x(p_1,p_2,p_3)(x-p_1)+F'_y(p_1,p_2,p_3)(y-p_2)+F'_z(p_1,p_2,p_3)(z-p_3)=0$$

Primjetimo da ako je data kriva u ravni $F(x,y)=0$ tada jednačina tangente u tački $N(c_1,c_2)$ ima jenačinu

$$F'_x(c_1,c_2)(x-c_1)+F'_y(c_1,c_2)(y-c_2)=0$$

npr. jednačina tangente na krivu $y=x^2+x-6$ u tački $(-3,0)$ je $y=-5x-15$.

U našem slučaju data površ je $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$.

$$F'_x=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad F'_y=\frac{1}{2\sqrt{y}},\quad F'_z=\frac{1}{2\sqrt{z}}$$

Uzmimo proizvoljnu tačku sa površi $M(p_1,p_2,p_3)$.

$$F'_x(p_1,p_2,p_3)=\frac{1}{2\sqrt{p_1}}=\frac{\sqrt{p_1}}{2p_1};\quad F'_y(p_1,p_2,p_3)=\frac{1}{2\sqrt{p_2}}=\frac{\sqrt{p_2}}{2p_2};\quad F'_z(p_1,p_2,p_3)=\frac{1}{2\sqrt{p_3}}=\frac{\sqrt{p_3}}{2p_3}$$

Jednačina tangentne ravni na površ u tački M

$$\frac{\sqrt{p_1}}{2p_1}(x-p_1)+\frac{\sqrt{p_2}}{2p_2}(y-p_2)+\frac{\sqrt{p_3}}{2p_3}(z-p_3)=0$$

Napišimo jednačinu u kanonskom obliku

$$\frac{\sqrt{p_1}}{2p_1}x+\frac{\sqrt{p_2}}{2p_2}y+\frac{\sqrt{p_3}}{2p_3}z=\underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{p_1}+\frac{1}{2}\sqrt{p_2}+\frac{1}{2}\sqrt{p_3}}_{\frac{1}{2}\sqrt{a}}\quad /\cdot 2/:\sqrt{a}$$

Primjetimo da je $\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}+\sqrt{p_3}=\sqrt{a}$ ZAŠTO?

$$\frac{x}{\frac{p_1\sqrt{a}}{\sqrt{p_1}}}+\frac{y}{\frac{p_2\sqrt{a}}{\sqrt{p_2}}}+\frac{z}{\frac{p_3\sqrt{a}}{\sqrt{p_3}}}=1$$

$$\frac{x}{\sqrt{p_1 a}}+\frac{y}{\sqrt{p_2 a}}+\frac{z}{\sqrt{p_3 a}}=1$$

Jednačina tangentne ravni na x-osi odsjeca $\sqrt{a}\cdot\sqrt{p_1}$, na y-osi $\sqrt{a}\cdot\sqrt{p_2}$ i na z-osi $\sqrt{a}\cdot\sqrt{p_3}$.

Zbir ovih odsječaka iznosi

$$\sqrt{a}\sqrt{p_1}+\sqrt{a}\sqrt{p_2}+\sqrt{a}\sqrt{p_3}=\sqrt{a}(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}+\sqrt{p_3})=a$$

q.e.d.

(#) Nađite udaljenost ishodišta koordinatnog sistema od tangentne ravni (helikoida) $y = x\, tg\, \frac{z}{a}$ u tački $(a, a, \frac{\pi a}{4})$.

Rj: $F'_x(p_1,p_2,p_3)(x-p_1) + F'_y(p_1,p_2,p_3)(y-p_3) + F'_z(p_1,p_2,p_3)(z-p_3) = 0$

jednačina tangentne ravni na površ $F(x,y,z)=0$

$$y - x\, tg\, \frac{z}{a} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -tg\, \frac{z}{a} \quad \Rightarrow \quad F'_x\left(a, a, \frac{\pi a}{4}\right) = -tg\, \frac{\frac{\pi a}{4}}{a} = -tg\, \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 \quad \Rightarrow \quad F'_y\left(a,a,\frac{\pi a}{4}\right) = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{-x}{\cos^2 \frac{z}{a}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{-x}{a \cos^2 \frac{z}{a}} \quad \Rightarrow \quad F'_z\left(a,a,\frac{\pi a}{4}\right) = \frac{-a}{a \cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{-1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$F'_z\left(a,a,\frac{\pi a}{4}\right) = -2$$

$$-1(x-a) + 1\cdot(y-a) + (-2)\left(z - \frac{\pi a}{4}\right) = 0$$

$$-x + y - 2z + a - a + \frac{\pi a}{2} = 0$$

$$-x + y - 2z + \frac{\pi a}{2} = 0$$

jednačina tangentne ravni helikoida u tački $(a, a, \frac{\pi a}{4})$.

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad O(0,0,0)$$

$$d = \frac{0 + 0 + 0 + \frac{\pi a}{2}}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{\pi a}{2\sqrt{6}}$$

udaljenost početka koordinatnog sistema od tangentne ravni

(#) Napisati jednačinu tangentne ravni i normale na površ $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8$ u tački $M(2,2,1)$.

Rj. Ako površ S ima jednačinu u implicitnom obliku $F(x,y,z)=0$ tada jednačina tangentne ravni i normale na površ S u tački $M(p_1,p_2,p_3)$ se računaju po formuli:

$$\alpha: F'_x(p_1,p_2,p_3)(x-p_1)+F'_y(p_1,p_2,p_3)(y-p_2)+F'_z(p_1,p_2,p_3)(z-p_3)=0$$

$$n: \frac{x-p_1}{F'_x(p_1,p_2,p_3)}=\frac{y-p_2}{F'_y(p_1,p_2,p_3)}=\frac{z-p_3}{F'_z(p_1,p_2,p_3)}$$

$$2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8$$

$$\left(\frac{x}{z}\right)'_z=\left(xz^{-1}\right)'_z=(-1)x\,z^{-2}$$

$$F(x,y,z)=2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}-8=0$$

$$F'_x=2^{\frac{x}{z}}\ln 2\cdot\frac{1}{z} \Rightarrow F'_x(2,2,1)=4\ln 2.$$

$$F'_y=2^{\frac{y}{z}}\ln 2\cdot\frac{1}{z} \Rightarrow F'_y(2,2,1)=4\ln 2$$

$$F'_z=2^{\frac{x}{z}}\ln 2\cdot\left(\frac{x}{z}\right)'_z+2^{\frac{y}{z}}\ln 2\left(\frac{y}{z}\right)'_z=-\frac{x}{z^2}2^{\frac{x}{z}}\ln 2-\frac{y}{z^2}2^{\frac{y}{z}}\ln 2$$

$$=-\frac{1}{z^2}\ln 2\left(x2^{\frac{x}{z}}+y2^{\frac{y}{z}}\right)$$

$$F'_z(2,2,1)=-\ln 2(2\cdot 4+2\cdot 4)=-16\ln 2$$

$$4\ln 2(x-2)+4\ln 2(y-2)+(-16\ln 2)(z-1)=0$$

$4x\ln 2+4y\ln 2-16z\ln 2+8\ln 2=0$ jednačina tangentne ravni

$$\frac{x-2}{4\ln 2}=\frac{y-2}{4\ln 2}=\frac{z-1}{-16\ln 2} \Rightarrow \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-4}$$

jednačina normale na površ